Matematická morfologie

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Úvod.
2. Dilatace.
3. Eroze.
4. Uzavření.
5. Otevření.
6. Skelet.
7. Tref či miň.
8. Ztenčování.
9. Zesilování.
10. Golayova abeceda.

Matematická morfologie

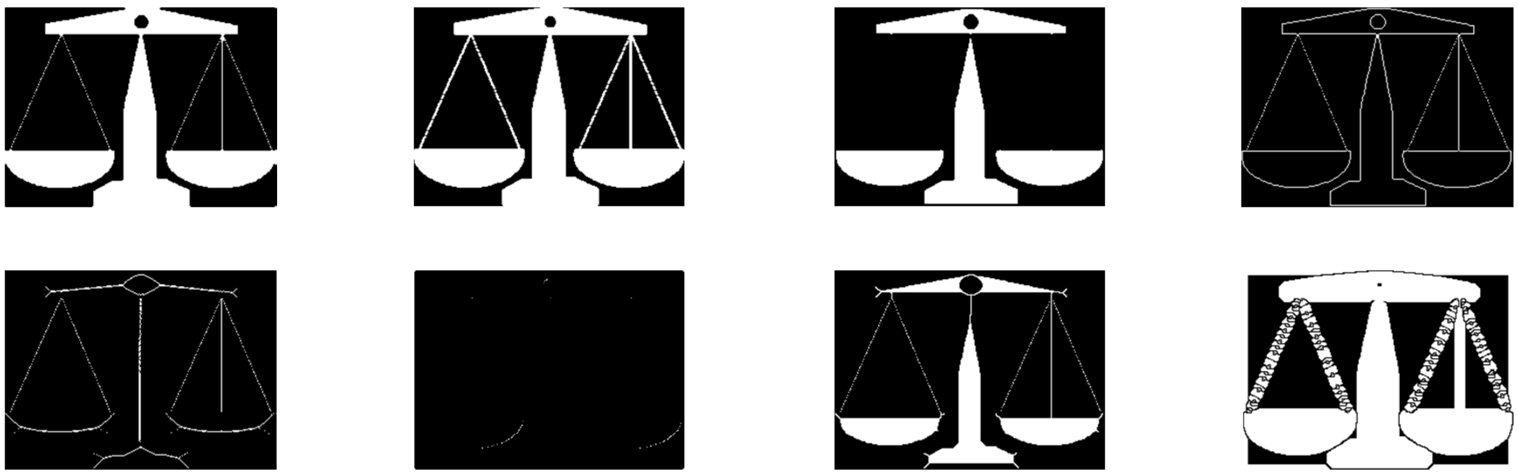
Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

Úvod – definice morfologie

- Morfe = tvar, morfologie = nauka o tvarech.
- Matematická morfologie (MM) = technika zpracování geometrických struktur původně založená na teorii množin.
- MM úlohu zpracování obrazu geometrizuje, pracuje s pojmy tvar objektů a transformace obrazu zachovávající jejich tvar.
- MM byla původně určena pro analýzu binárních obrazů (1964 – Georges Matheron, Jean Serra), později zobecněna i na šedo-tónové obrazy (detekce hran, redukce šumu, segmentace).



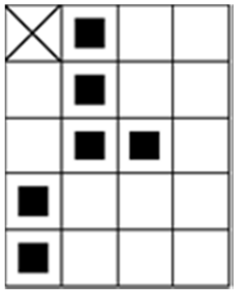
Úvod – terminologie

- Binární resp. šedo-tónový obraz (obecně signál) lze modelovat bodovou množinou v euklidovském prostoru E_2 resp. E_3.

- Spojitý binární resp. šedo-tónový obraz je definován na množině racionálních čísel R^2 resp. R^3
- Diskrétní binární resp. šedo-tónový obraz je definován na množině celých čísel Z^2 resp. Z^3

- Dále předpokládáme jen binární diskrétní obraz, čili bodové množiny na prostoru Z^2

- Binární diskrétní obraz – grafické a množinové vyjádření:



$$\longrightarrow \qquad I = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(0,3),(0,4)\}$$

- Počátek má v tomto případě souřadnice (x,y) = (0,0) a je označen křížkem.

- Body obrazu náležející objektu jsou v množinovém zápisu vyjádřeny uspořádanou dvojicí jejich celočíselných souřadnic $\Rightarrow$ definiční obor je dán rozměry obrazu, obor hodnot je $\{0;1\}$.

Úvod – morfologická operace

- Základní operátory pro morfologické operace:
  1. dilatace
  2. eroze
  3. otevření
  4. uzavření
  5. tref či miň
  6. ztenčování
  7. zesilování

- Morfologická transformace je operátorová relace dvou bodových množin I a B:

$$MT \rightarrow op(\{I\},\{B\})$$

- Bodová množina I odpovídá obrazu, množina B se nazývá strukturní element (křížkem je označen lokální počátek):

Matematická morfologie

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Úvod.
2. **Dilatace.**
3. Eroze.
4. Uzavření.
5. Otevření.
6. Skelet.
7. Tref či miň.
8. Ztenčování.
9. Zesilování.
10. Golayova abeceda.

Dilatace – definice

- Vektorový součet množin I a B:

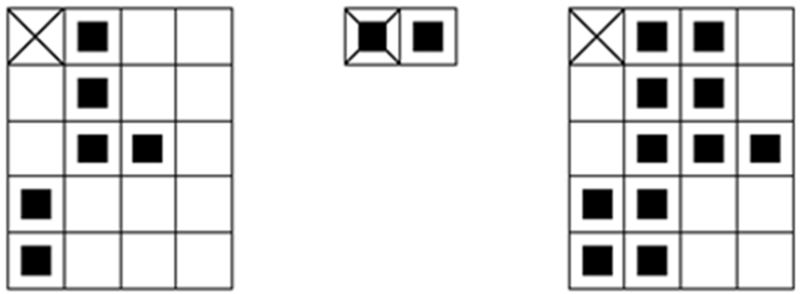
$$I \oplus B = \{p \in E^2 : p = i + b, \forall i \in I, \forall b \in B\}$$

- Pokud jsou bodová množina obrazu I a strukturní element B definovány:

$$I = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(0,3),(0,4)\}$$
$$B = \{(0,0),(1,0)\}$$

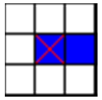
- Pak pro dilataci platí:

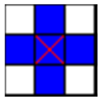
$$I \oplus B = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(0,3),(0,4),(2,0),(2,1),(2,2),(3,2),(1,3),(1,4)\}$$

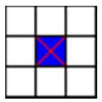


Dilatace – příklad

- Shodná vstupní bodová množina I, rozdílný strukturní element B:

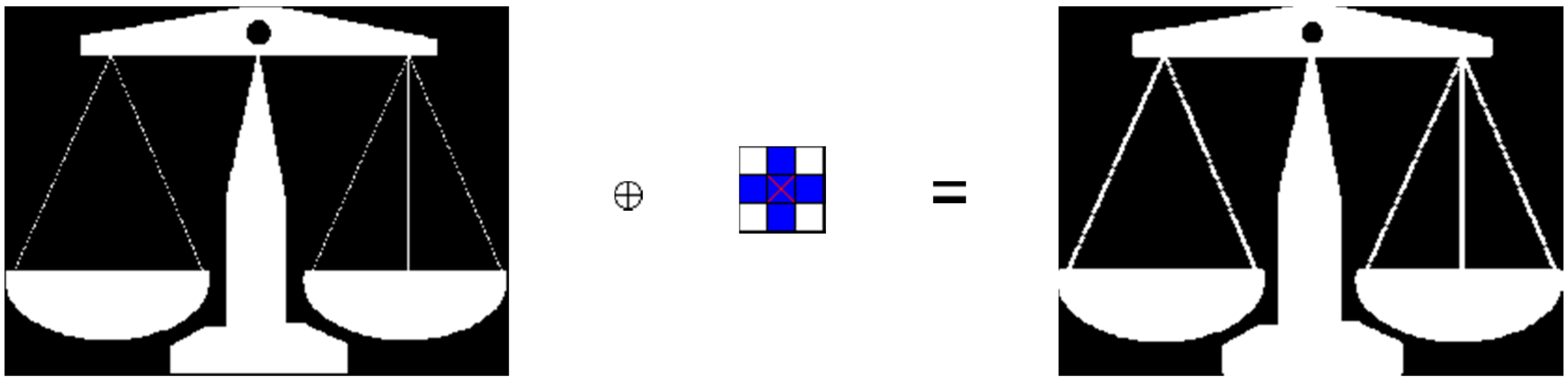
 $\oplus$  = 

 $\oplus$  = 

- Jaký bude výsledek dilatace obrazu a strukturního elementu  ?

Dilatace – vlastnosti

- Komutativnost: $I \oplus B = B \oplus I$
- Asociativnost: $I \oplus (B \oplus C) = (I \oplus B) \oplus C$
- Rostoucí transformace: $I \subseteq J \Rightarrow I \oplus B \subseteq J \oplus B$
- Sjednocení posunutých bodových množin: $I \oplus B = \bigcup_{b \in B} I_b$
- Invariance k translaci: $I_T \oplus B = (I \oplus B)_T$



Matematická morfologie

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

Eroze – definice

- Vektorový rozdíl množin I a B:

$$I \ominus B = \{ p \in E^2 : p + b \in I \text{ pro } \forall b \in B \}$$

- Pokud jsou bodová množina obrazu I a strukturní element B definovány:

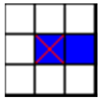
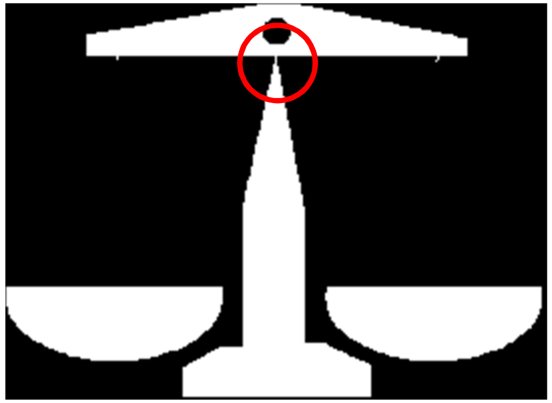
$$I = \{(1,0),(1,1),(1,2),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(1,4)\}$$
$$B = \{(0,0),(1,0)\}$$

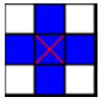
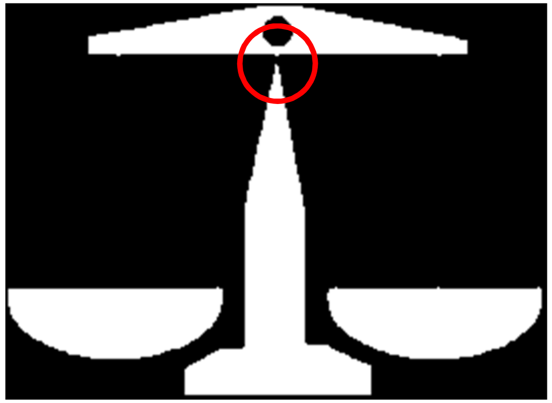
- Pak pro erozi platí:

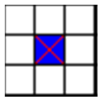
$$I \ominus B = \{(0,3),(1,3),(2,3)\}$$

Eroze – příklad

- Shodná vstupní bodová množina I, rozdílný strukturní element B:

 $\ominus$  $=$ 

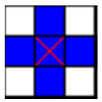
 $\ominus$  $=$ 

- Jaký bude výsledek eroze obrazu a strukturního elementu ?

Eroze – vlastnosti

- Antiextenzivnost: $(0,0) \in B \Rightarrow I \ominus B \subseteq I$
- Rostoucí transformace: $I \subseteq J \Rightarrow I \ominus B \subseteq J \ominus B$
- Průnik posunutých bodových množin: $I \ominus B = \bigcap_{b \in B} I_{-b}$
- Invariance k translaci:
$$I_T \ominus B = (I \ominus B)_T$$
$$I \ominus B_T = (I \ominus B)_{-T}$$
- Eroze je duální transformací k dilataci, nikoliv inverzní $\Rightarrow$ sekvenční aplikací lze získat nový operátor, nikoliv operátor restaurace původního obrazu.

$\ominus$



$=$

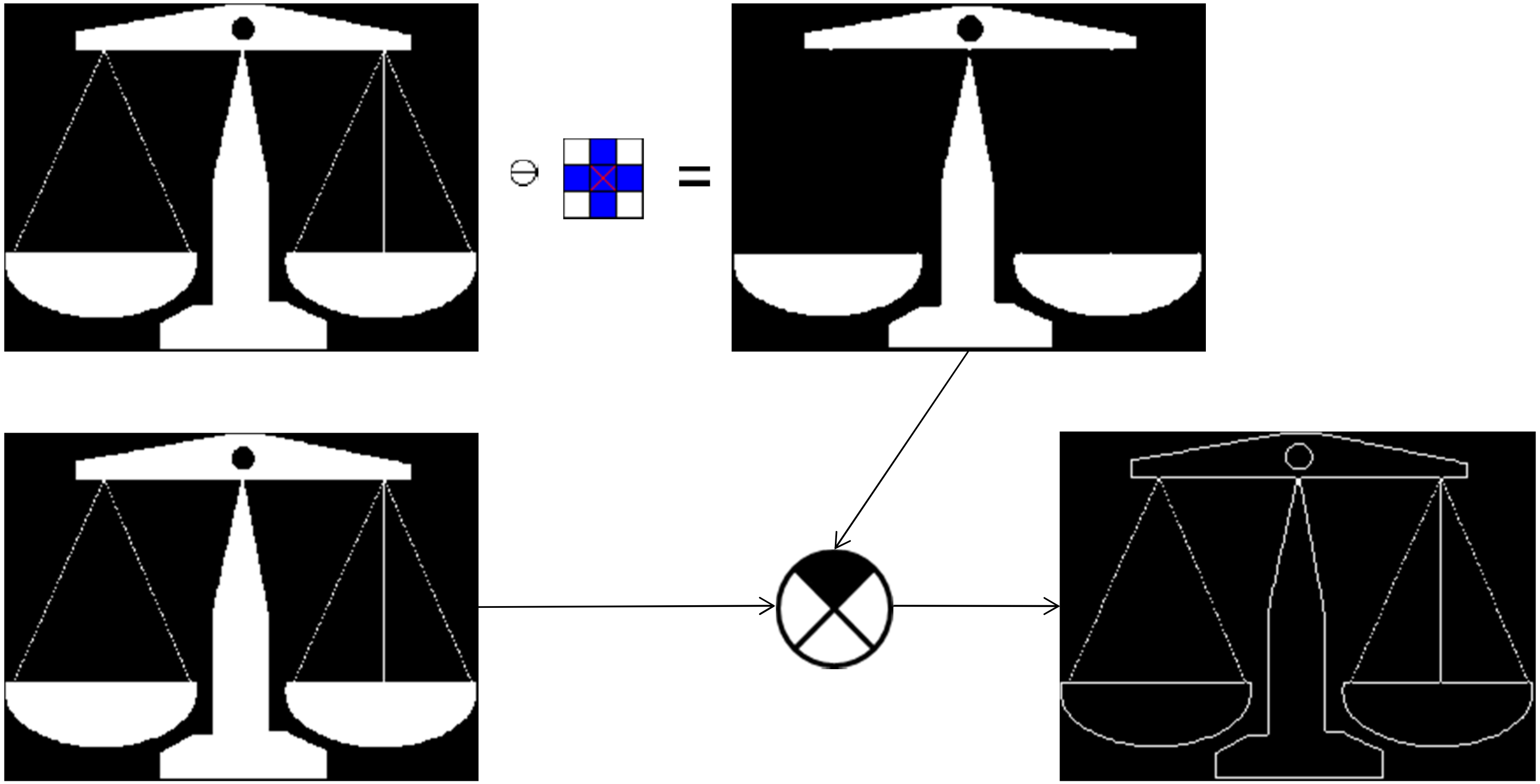
Eroze – obrys

- Operací eroze se objekt zmenšuje o jednu slupku na úkor okolí $\Rightarrow$ rozdílem původního obrazu a obrazu erodovaného lze získat obrysy objektů:

$$O = I - (I \ominus B)$$

1.

2.



Matematická morfologie

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

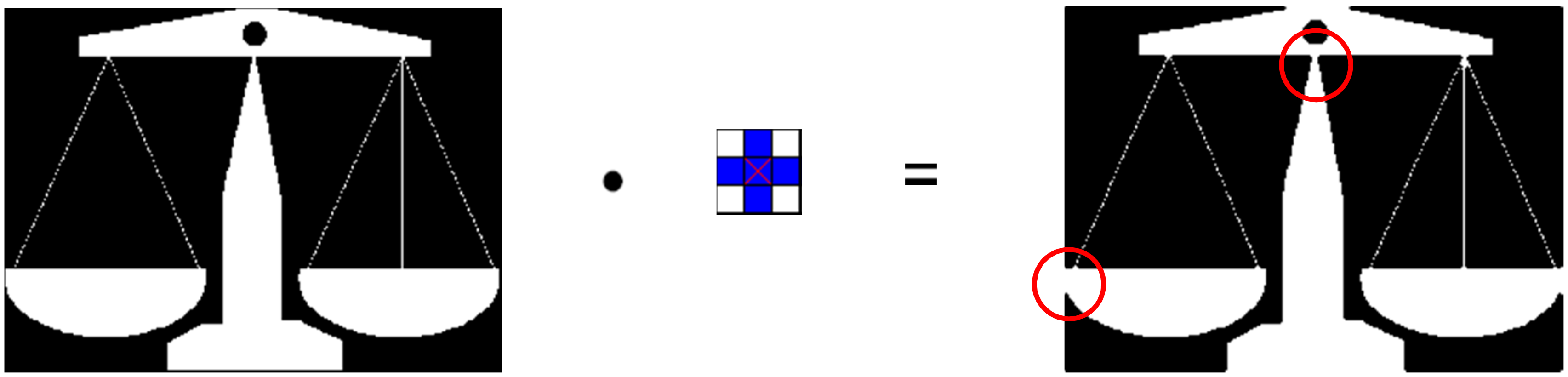
1. Úvod.
2. Dilatace.
3. Eroze.
4. **Uzavření.**
5. Otevření.
6. Skelet.
7. Tref či miň.
8. Ztenčování.
9. Zesilování.
10. Golayova abeceda.

Uzavření – definice

- Vzhledem k tomu, že dilatace a eroze nejsou vzájemně inverzní zobrazení, vznikají jejich kombinací nové operátory.
- Transformace dilatace následovaná erozí se nazývá morfologické uzavření:

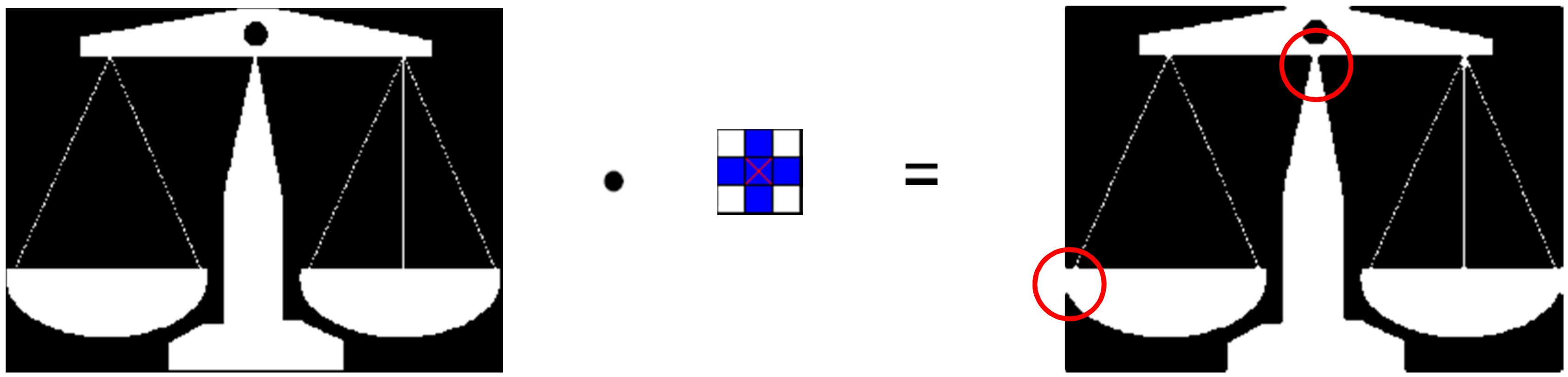
$$I \bullet B = (I \oplus B) \ominus B$$

- Morfologické uzavření spojuje blízké objekty a zaplňuje díry – míra spojení a zaplnění je dána velikostí a tvarem strukturního elementu B, který je pro obě operace shodný.
- Proč sekvenčně použít operace dilatace a eroze? Sníží se množství detailů v obrazu ⇒ zjednodušuje se struktura a přitom původní velikost objektů zůstává zachována.



Uzavření – vlastnosti

- Uzavření je na rozdíl od dilatace a eroze operace nezávislá na posunu souřadnic počátku strukturního elementu.
- Extenzivnost: $I \subseteq I \bullet B$
- Idempotentnost: $I \bullet B = (I \bullet B) \bullet B$
- Idempotentnost = množina I je již po první aplikaci operátoru uzavřená vzhledem ke strukturnímu elementu B a opakovaná aplikace již nemění výsledek operace.



Matematická morfologie

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

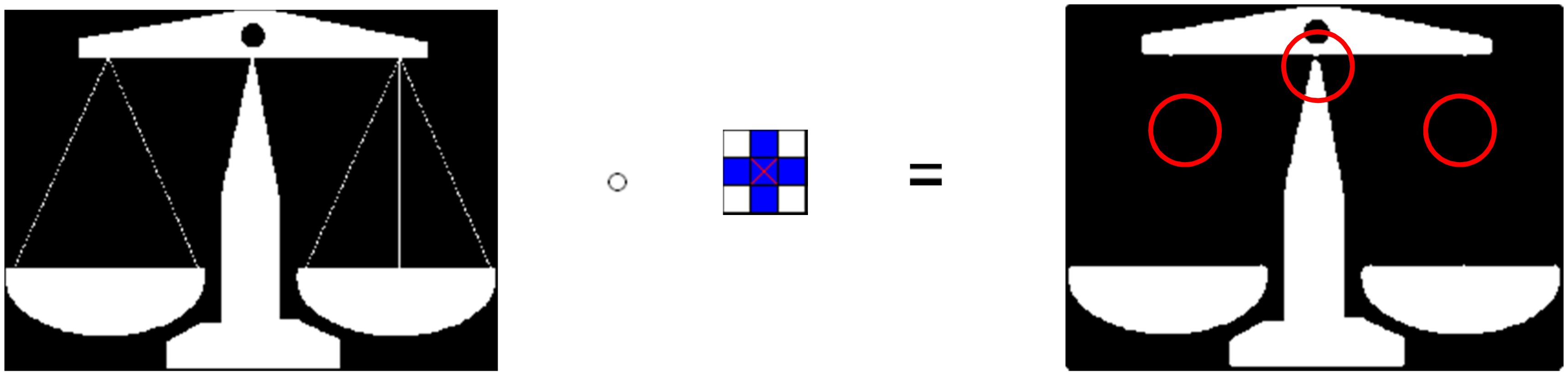
Otevření – definice

- Transformace eroze následovaná dilatací se nazývá morfologické otevření:

$$I \circ B = (I \ominus B) \oplus B$$

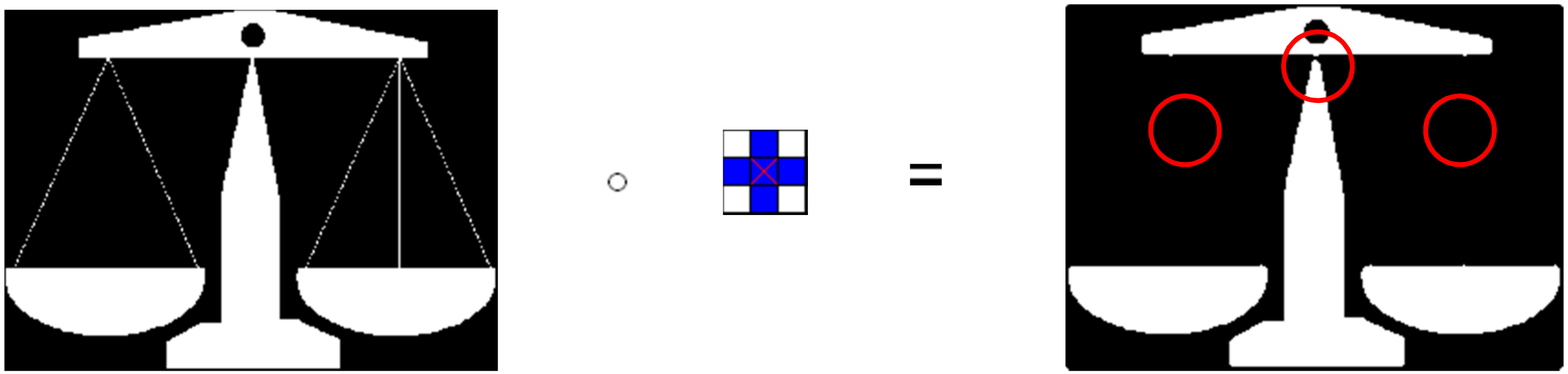
- Morfologické otevření odděluje objekty spojené tenkou čarou a odstraňuje šum – míra rozpojení a redukce šumu je dána velikostí a tvarem strukturního elementu.

- Morfologické uzavření i otevření se používá pro snížení množství detailů v obrazu, základní tvar a původní rozměry objektu však zůstávají neporušeny.



Otevření – vlastnosti

- Otevření je na rozdíl od dilatace a eroze nezávislé na posunu souřadnic počátku strukturního elementu.
- Antiextenzivnost: $$I \circ B \subseteq I$$
- Idempotentnost: $$I \circ B = (I \circ B) \circ B$$
- Idempotentnost = množina I je již po první aplikaci operátoru otevřená vzhledem ke strukturnímu elementu B a opakovaná aplikace již nemění výsledek operace.



Matematická morfologie

Karel Horák

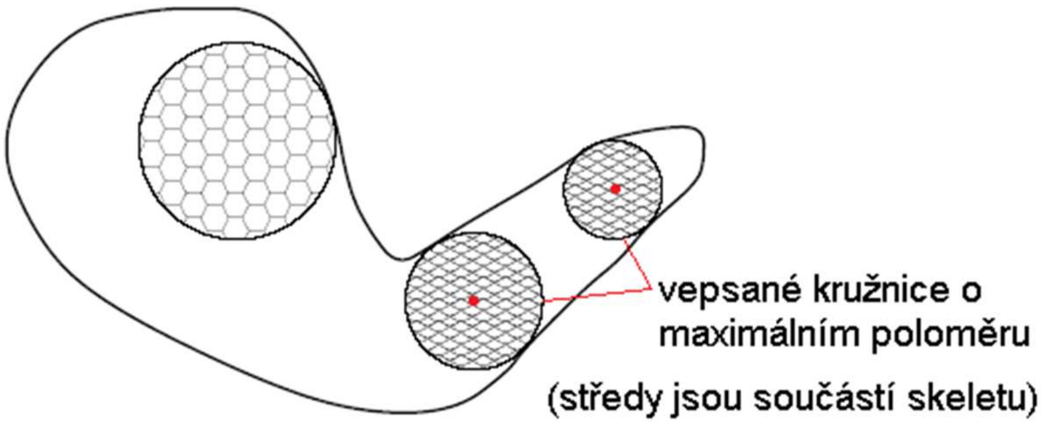
Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

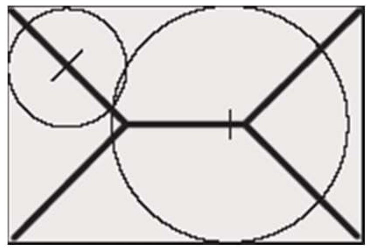
1. Úvod.
2. Dilatace.
3. Eroze.
4. Uzavření.
5. Otevření.
6. **Skelet.**
7. Tref či miň.
8. Ztenčování.
9. Zesilování.
10. Golayova abeceda.

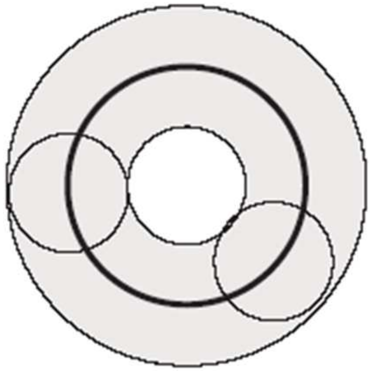
Skelet

- Skelet S(I) je reprezentace objektů v obrazu I za pomoci tenkých čar.
- Čáry skeletu jsou sjednocením bodů odpovídajících středům kružnic, které jsou obsaženy v objektech množiny I a dotýkají se její hranice nejméně dvěma body.



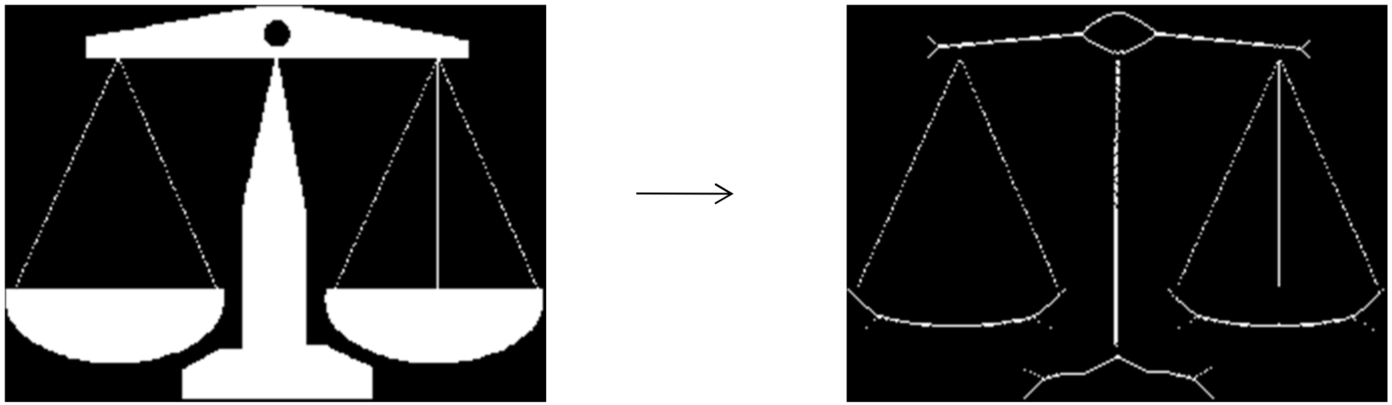
- Skelet může být libovolná topologická křivka:



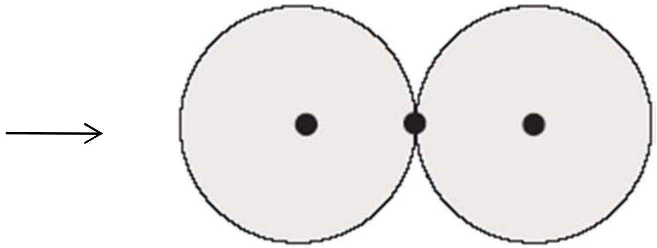


Skelet

- Kostra objektu (skelet) vytvořená pomocí operací dilatace a eroze může být složena z čar širších, něž jeden bod. Z tohoto důvodu se skelet aproximuje kostrou objektu získanou pomocí sekvenčního ztenčování (viz dále).



- Skelet spojité množiny nemusí být vždy spojitá množina (není homotopický):



- Tvar výsledného skeletonu je silně závislý na šumu v původním obrazu:

Matematická morfologie

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

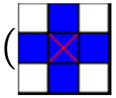
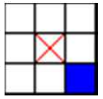
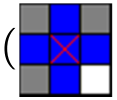
Rozvrh přednášky:

Tref či miň – definice

- Transformace tref či miň („hit or miss“ nebo Serrova tr.) pracuje na principu vyhledávání shody mezi bodovou množinou binárního obrazu I a definovaným složeným strukturním elementem B:

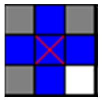
$$B = \{B_1, B_2\}$$

- Sub-element B_1 reprezentuje vyžadované body náležející objektu (■), sub-element B_2 vyžadované body náležející pozadí (□) a na zbylých pozicích (■) při výpočtu transformace nezáleží:

{ B_1 () , B_2 () } = { B () }

- Transformace pak zachovává ty body z množiny I, které odpovídají (jsou přítomny) sub-elementu B_1 a současně neodpovídají (nejsou přítomny) sub-elementu B_2 a je matematicky definována:

$$I \otimes B = \{p \in I : B_1 \subset I \wedge B_2 \subset I^C\}$$

 $\otimes$  = 

Tref či miň – vlastnosti

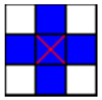
- Transformaci tref či miň lze definovat také pomocí operací dilatace a eroze:
  (symbol "|" představuje jednostranný množinový rozdíl, I^C je doplněk bodové množiny I)

$$I \otimes B = (I \ominus B_1) \cap (I^C \ominus B_2) = (I \ominus B_1) \,|\, (I \oplus B_2)$$

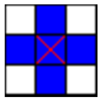
- Tref či miň se mj. používá pro operace ztenčování a zesilování bodových množin (viz dále).

- Jaký bude výsledek transformace tref či miň, pokud budou sub-elementy totožné?

B_1

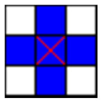


B_2

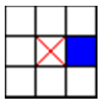


- Jaký bude výsledek transformace tref či miň, pokud budou sub-elementy obsahovat jeden překrývající se prvek?

B_1



B_2



Matematická morfologie

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Úvod.
2. Dilatace.
3. Eroze.
4. Uzavření.
5. Otevření.
6. Skelet.
7. Tref či miň.
8. **Ztenčování.**
9. Zesilování.
10. Golayova abeceda.

Ztenčování – definice

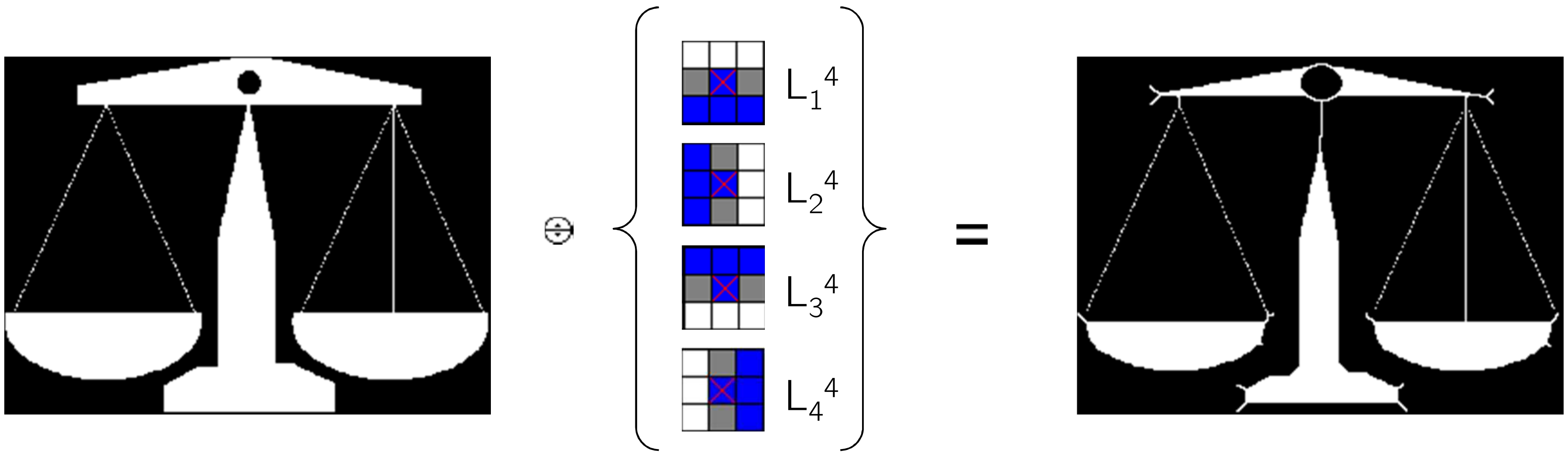
- Ztenčování bodové množiny binárního obrazu I složeným strukturním elementem B je definováno:

$$I \odiv B = I \mid (I \otimes B)$$

- Sekvenční ztenčování je pak opakovaná aplikace transformace ztenčování s posloupností $\{B_i\}$ složených strukturních elementů:

$$\{B_i\} = \{B_1, B_2, \ldots\} = \{(B_{11}, B_{12}), (B_{21}, B_{22}), \ldots\}$$

- Sekvenční ztenčování s konstantní posloupností složených strukturních elementů typu L (viz dále):

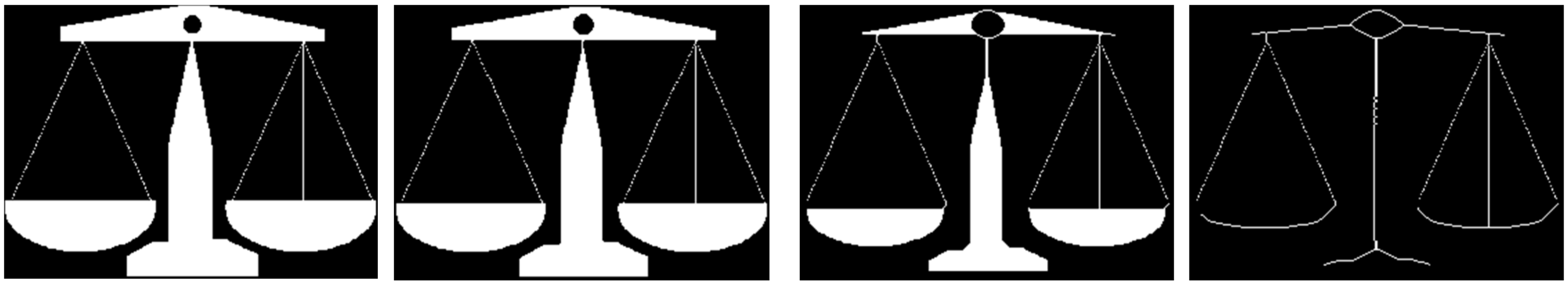


Ztenčování – vlastnosti

- Sekvenční ztenčování zachovává Euler-Poincaré charakteristiku (počet oblastí – počet děr).

- Konvergence sekvenčního ztenčování vede na čáry o šířce právě jednoho obrazového bodu $\Rightarrow$ sekvenční ztenčování se stejným strukturním elementem B do stavu idempotence se používá jako aproximace skeletu.

- Sekvenční ztenčování s jednou, pěti a neomezeným počtem iterací (konverguje do dosažení idempotence) s konstantním složeným strukturním elementem:



Matematická morfologie

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Úvod.
2. Dilatace.
3. Eroze.
4. Uzavření.
5. Otevření.
6. Skelet.
7. Tref či miň.
8. Ztenčování.
9. **Zesilování.**
10. Golayova abeceda.

Zesilování – definice

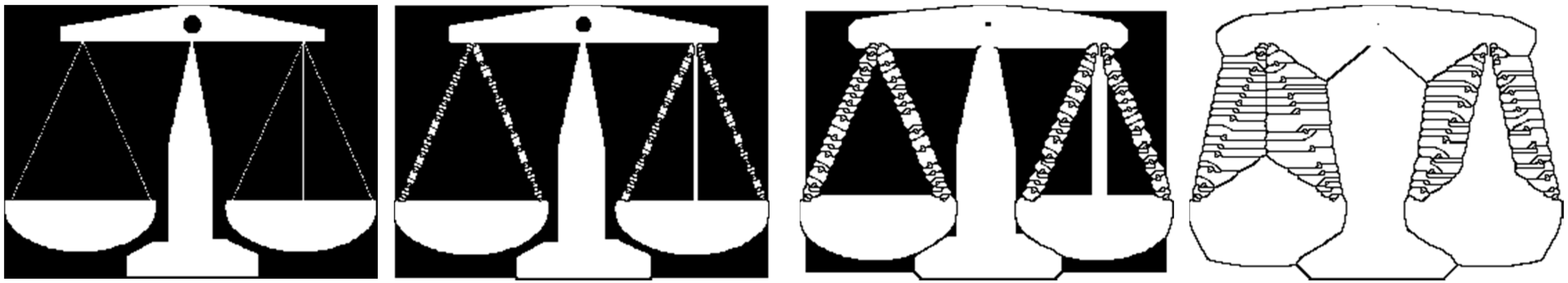
- Definice zesilování bodové množiny binárního obrazu I složeným strukturním elementem B je analogická ke ztenčování (jde o duální transformace podobně jako dilatace a eroze):

$$I \odot B = I \cup (I \otimes B)$$

- Sekvenční zesilování je pak opakovaná aplikace transformace prostého zesilování s posloupností $\{B_i\}$ složených strukturních elementů:

$$\{B_i\} = \{B_1, B_2, ...\} = \{(B_{11}, B_{12}), (B_{21}, B_{22}), ...\}$$

- Sekvenční zesilování s jednou, pěti a neomezeným počtem iterací (konverguje do dosažení idempotence) s konstantním složeným strukturním elementem:



Matematická morfologie

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Úvod.
2. Dilatace.
3. Eroze.
4. Uzavření.
5. Otevření.
6. Skelet.
7. Tref či miň.
8. Ztenčování.
9. Zesilování.
10. **Golayova abeceda.**

Golayova abeceda

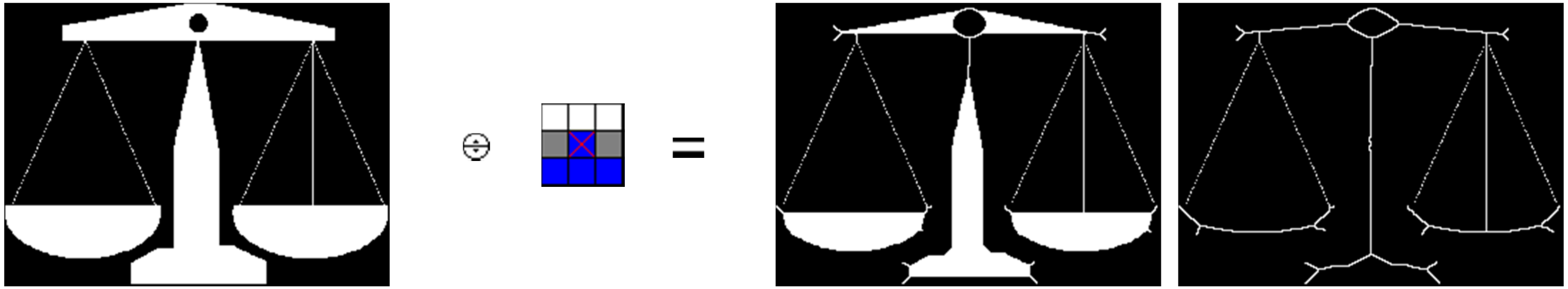
- Golayova abeceda je skupina významných složených strukturních elementů s definovaným použitím.
- Mezi základní elementy Golayovy abecedy patří: L, E, M, D, C
- Jedničky v masce odpovídají sub-elementu B_1 (objekty), nuly sub-elementu B_2 (okolí) a hvězdičky prvkům, které nejsou pro operaci relevantní (nejsou vůbec počítány).
- Každý element Golayovy abecedy má osm variant strukturních elementů pro čtvercový rastr (např. $L_1{}^4$) a osm variant pro oktagonální rastr (např. $L_1{}^8$).
- element L – použití pro sekvenční ztenčování jako aproximace skeletu:

$$L_1^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & * \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2^4 = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & * \end{bmatrix} \quad \ldots \quad L_1^8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & * \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2^8 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ * & 1 & * \end{bmatrix}$$

- Dalším otáčením ve směru hodinových ručiček lze obdržet zbylé varianty elementu.

Golayova abeceda

- Výsledek aplikace ztenčování elementem L po pěti a neomezeném počtu iterací (skelet):



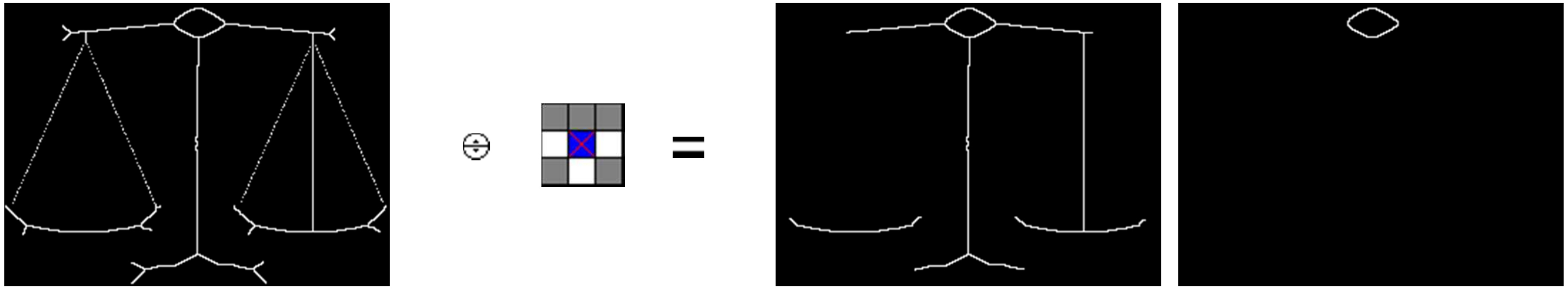
- Obraz skeletu má roztřepené konce, k jejíchž redukci se používá ztenčování elementem E:

$$E_1^4 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix} \qquad E_2^4 = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix} \qquad \ldots \qquad E_1^8 = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_2^8 = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sekvenční ztenčování má za následek ořezávání volných konců – velikost ořezání je závislá na počtu iterací (neomezený počet iterací ponechá v obrazu pouze uzavřené kontury).

Golayova abeceda

- Výsledek aplikace ztenčování elementem E po pěti a neomezeném počtu iterací (skelet):



- Sekvenční ztenčování elementem M se používá jako alternativní výpočet skeletu, ale vykazuje oproti elementu L vyšší míru roztřepení konců:

- Sekvenční ztenčování elementem D = nahrazení objektu bez díry jedním bodem.
- Sekvenční zesilování elementem D* (prohozené B_1 a B_2) = pseudo-konvexní obal.
- Sekvenční zesilování elementem C = konvexní obal (může porušit homotopický strom).